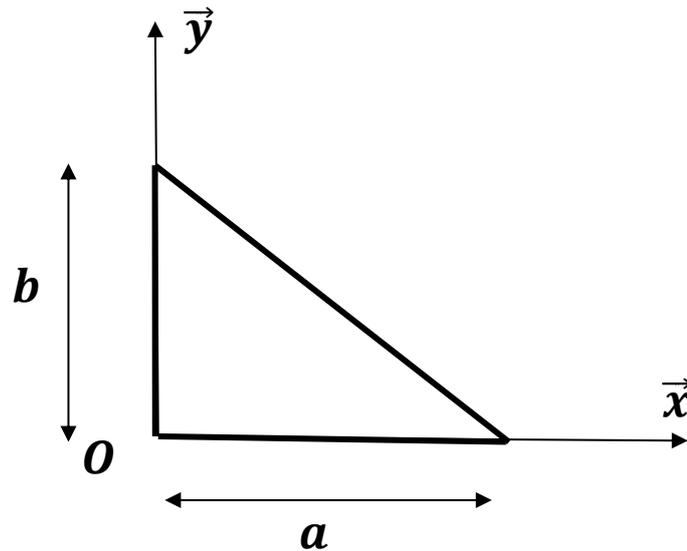


Dernière mise à jour	TD	Denis DEFAUCHY
21/04/2020	Statique	TD0 - Correction

Exercice 1: Surface et centre d'un triangle



Question 1: Choisir le système de coordonnées adapté au problème et poser l'élément de surface associé

Coordonnées cartésiennes

$$dS = dx dy$$

Question 2: Donner les intervalles de variation de chaque paramètre pour décrire la surface étudiée

Deux solutions :

$$x \in [0, a] \text{ \& } y \in \left[0, \frac{b}{a}(a-x)\right]$$

$$y \in [0, b] \text{ \& } x \in \left[0, \frac{a}{b}(b-y)\right]$$

Question 3: Déterminer la surface du triangle par calcul intégral en fonction de a et b

$$S \int_S dS = \int_{x=0}^a \left(\int_{y=0}^{y(x)} dy \right) dx = \int_{y=0}^b \left(\int_{x=0}^{x(y)} dx \right) dy$$

$$y(x) = b - \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}(a-x)$$

$$S = \int_{x=0}^a \left(\int_{y=0}^{\frac{b}{a}(a-x)} dy \right) dx = \int_{x=0}^a \left(\frac{b}{a}(a-x) \right) dx = \frac{b}{a} \left[ax - \frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{b}{a} \left(a^2 - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{b a^2}{a 2}$$

$$S = \frac{ab}{2}$$

Dernière mise à jour	TD	Denis DEFAUCHY
21/04/2020	Statique	TD0 - Correction

Question 4: Déterminer les coordonnées X_G et Y_G du centre géométrique du triangle en fonction de a et b

$$S = \frac{ab}{2}$$

$$X_G = \frac{1}{S} \int_S x dS = \frac{1}{S} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\frac{b}{a}(a-x)} x dy dx = \frac{1}{S} \int_{x=0}^a x \left(\frac{b}{a}(a-x) \right) dx = \frac{b}{aS} \int_{x=0}^a (ax - x^2) dx$$

$$X_G = \frac{b}{aS} \left[a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{b}{aS} \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{ba^3}{aS} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{2ba^2}{ab6} = \frac{1}{3}a$$

$$Y_G = \frac{1}{S} \int_S y dS = \frac{1}{S} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\frac{b}{a}(a-x)} y dy dx = \frac{1}{S} \int_{x=0}^a \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a}(a-x) \right)^2 dx = \frac{b^2}{2a^2S} \int_{x=0}^a (a-x)^2 dx$$

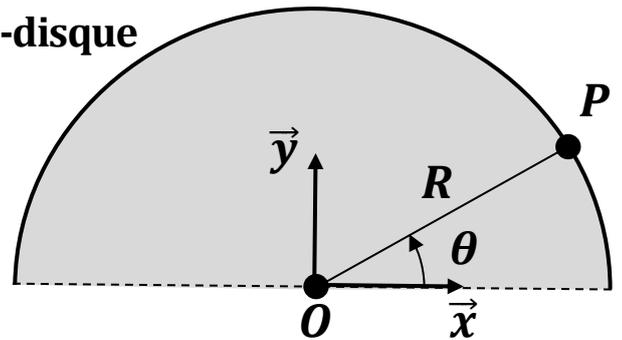
$$Y_G = \frac{b^2}{2a^2S} \int_{x=0}^a (a^2 - 2xa + x^2) dx = \frac{b^2}{2a^2S} \left[a^2x - x^2a + \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{2b^2}{2a^2ab} \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3}b$$

$$\begin{cases} X_G = \frac{1}{3}a \\ Y_G = \frac{1}{3}b \end{cases}$$

Rq : pour cette seconde intégrale, il est plus simple d'inverser les bornes en intégrant y de 0 à b et x de 0 à $x(y)$

Dernière mise à jour	TD	Denis DEFAUCHY
21/04/2020	Statique	TD0 - Correction

Exercice 2: Surface et centre d'un demi-disque



Question 1: Choisir le système de coordonnées adapté au problème et poser l'élément de surface associé

Coordonnées cylindriques : $dS = r dr d\theta$

Question 2: Donner les intervalles de variation de chaque paramètre pour décrire la surface étudiée

$$r \in [0, R] \quad ; \quad \theta \in [0, \pi]$$

Question 3: Déterminer la surface du demi-disque par calcul intégral en fonction de R

$$S = \int_S dS = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} r dr d\theta = \int_{r=0}^R r dr \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta = \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R [\theta]_0^{\pi} = \frac{\pi R^2}{2}$$

Question 4: Déterminer les coordonnées X_G et Y_G du centre géométrique du demi-disque en fonction de R

Compte tenu de l'axe de symétrie (O, \vec{y}) , $X_G = 0$

$$y = r \sin \theta$$

$$Y_G = \frac{1}{S} \int_S y dS = \frac{1}{S} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} r \sin \theta r dr d\theta = \frac{1}{S} \int_{r=0}^R r^2 dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{1}{S} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R [-\cos \theta]_0^{\pi}$$

$$Y_G = \frac{1}{S} \frac{2R^3}{3} = \frac{2}{\pi R^2} \frac{2R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi}$$

$$\begin{cases} X_G = 0 \\ Y_G = \frac{4R}{3\pi} \end{cases}$$

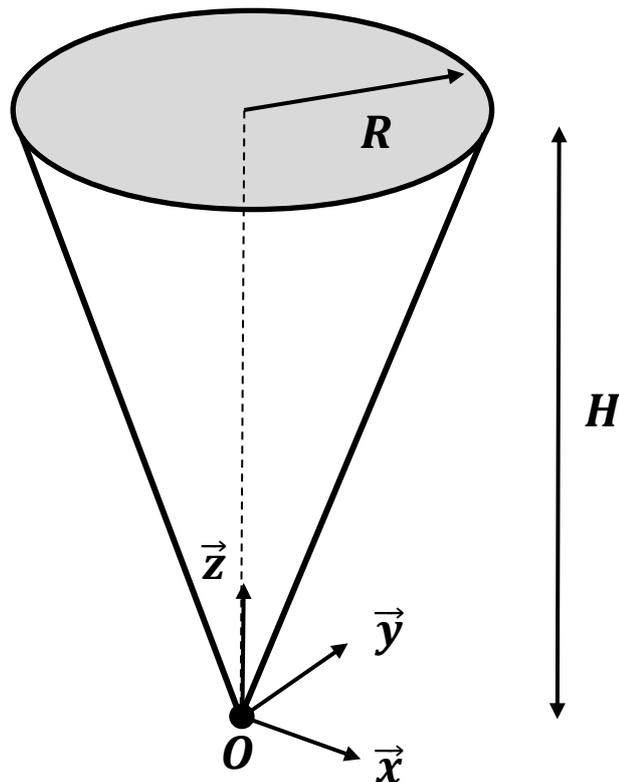
Remarque : Calcul cartésien pas trop dur ici grâce au carré qui apparaît...

$$Y_G = \frac{1}{S} \int_S y dS = \frac{1}{S} \int_{x=-R}^R \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} y dx dy = \frac{1}{S} \int_{x=-R}^R \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \frac{1}{2S} \int_{x=-R}^R (R^2 - x^2) dx$$

$$Y_G = \frac{1}{2S} \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = \frac{1}{2S} \left[R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) \right] = \frac{1}{S} \left[R^3 - \frac{R^3}{3} \right] = \frac{1}{S} \frac{2R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi}$$

Dernière mise à jour	TD	Denis DEFAUCHY
21/04/2020	Statique	TD0 - Correction

Exercice 3: Volume et centre d'un cône



Question 1: Choisir le système de coordonnées adapté au problème et poser l'élément de volume associé

Coordonnées cylindriques

$$dS = r dr d\theta dz$$

Question 2: Donner les intervalles de variation de chaque paramètre pour décrire le volume étudié

$$\begin{aligned} z &\in [0, H] \\ r &\in \left[0, z \frac{R}{H}\right] \\ \theta &\in [0, \pi] \end{aligned}$$

Question 3: Déterminer le volume du cône par calcul intégral en fonction de R et H

$$\begin{aligned} V &= \int_V dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^H \left(\int_{r=0}^{z \frac{R}{H}} r dr \right) dz d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^H \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{z \frac{R}{H}} dz = 2\pi \int_{z=0}^H z^2 \frac{R^2}{2H^2} dz \\ V &= \pi \frac{R^2}{H^2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^H = \pi \frac{R^2}{H^2} \frac{H^3}{3} = \frac{\pi R^2 H}{3} \end{aligned}$$

Dernière mise à jour	TD	Denis DEFAUCHY
21/04/2020	Statique	TD0 - Correction

Question 4: Déterminer les coordonnées X_G , Y_G et Z_G du centre géométrique du cône en fonction de R et H

Compte tenu de l'axe de révolution, $X_G = Y_G = 0$

$$Z_G = \frac{1}{V} \int_V z dV = \frac{1}{V} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^H \left(\int_{r=0}^{\frac{zR}{H}} r dr \right) z dz d\theta = \frac{1}{V} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^H \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\frac{zR}{H}} z dz$$

$$Z_G = \frac{1}{V} \frac{\pi R^2}{H^2} \int_{z=0}^H z^3 dz = \frac{1}{V} \frac{\pi R^2}{H^2} \frac{H^4}{4}$$

$$Z_G = \frac{3}{\pi R^2 H} \frac{\pi R^2}{H^2} \frac{H^4}{4} = \frac{3}{4} H$$

$$\begin{cases} X_G = 0 \\ Y_G = 0 \\ Z_G = \frac{3}{4} H \end{cases}$$